Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 15. Dezember 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 8

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H08.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 13. Dezember 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

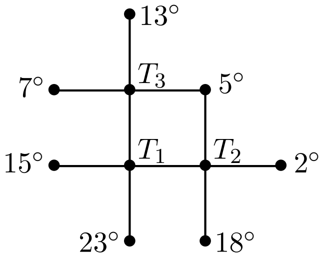
Lesen Sie den Abschnitt **2.2.2 Gaußscher Algorithmus** und den Abschnitt **2.2.3 RZSF und die Lösungsmenge eines LGS** im non-Skript. Schreiben Sie dann den Gaußschen Algorithmus in Pseudocode auf.

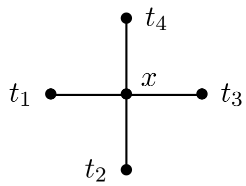
Lösung zu Übung 1.

```
Eingabe: A ∈ Mat_{m,n}(𝕂)
Ausgabe: r = ^{ZS}Rang(A), RZ(A) und U ∈ Gl_m(𝕂) mit U·A = RZ(A).

r:=0; -- das wird der Rang sein
U:=I_m;  -- das wird die Zeilenumformmatrix sein

i:=1; -- Zeilenindex
j:=1; -- Spaltenindex
while i ⩽ m and j ⩽ n do
  if (a_{i,j},...,a_{m,j}) = (0,...,0) then
    j:=j+1;
  else
    i_min := min{ k  : i⩽k⩽m und a_{k,j}≠0};
    vertausche Zeilen i_min und i in A;       -- das kann man separat definieren
    vertausche Zeilen i_min und i in U;       -- das kann man separat definieren
    for h = 1 ... n do                          -- i.Zeile in A mit 1/a_{i,j} multiplizieren
      a_{i,h} := a_{i,h}/a_{i,j}
    ;
    for h = 1 ... m do                          -- i.Zeile in U mit 1/a_{i,j} multiplizieren
      u_{i,h} := u_{i,h}/a_{i,j}
    ;
    -- den nächsten Teil kann man effizienter machen; das ist aber nicht das Ziel hier.
    for k = 1 ... m , k ≠ i, do
      for h = j ... n do                        -- Umformung der k. Zeile in A
        a_{k,h}:=a_{k,h} - a_{k,j}·a_{i,h}
      ;
      for h = 1 ... m do                 -- die entsprechende Umformung der k.Zeile in U
```

```
          u_{k,h}:=u_{k,h} - a_{k,j}·u_{i,h}
        ;
      ;
      r:=r+1;
    ;
    i:=i+1;
    j:=j+1;
  ;
  return r, A, U;
```

Aufgabe 2. **2 Punkte**





$$x = \frac{1}{4} \cdot t_1 + \frac{1}{4} \cdot t_2 + \frac{1}{4} \cdot t_3 + \frac{1}{4} \cdot t_4.$$

Die Temperatur x an einem Punkt • im obigen Gitter $\mathcal{G}$ ist der Durchschnitt der Temperaturen an den Nachbarpunkten.

1. Man bestimme die Temperaturen T_1, T_2, T_3 im gegebenen Gitter $\mathcal{G}$.
2. Man zeige, dass für das Gitter $\mathcal{G}$ jede Wahl von Temperaturen am Rand die Temperaturen T_1, T_2 und T_3 eindeutig bestimmt.

Lösung zu Übung 2.

1. *Aus der Gitterbedingung folgt das lineare Gleichungssystem:*

$$\begin{cases} T_1 - \frac{1}{4}T_2 - \frac{1}{4}T_3 & = & \frac{1}{4} \cdot (15 + 23) \\ -\frac{1}{4}T_1 + T_2 & = & \frac{1}{4} \cdot (5 + 2 + 18) \\ -\frac{1}{4}T_1 + T_3 & = & \frac{1}{4} \cdot (7 + 13 + 5) \end{cases}$$

Wir können alle drei Gleichungen mit 4 multipizieren und bekommen dann die erweiterte Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 38 \\ -1 & 4 & 0 & 25 \\ -1 & 0 & 4 & 25 \end{pmatrix}$$

Mit dem gaußschen Algorithmus bekommen wir die Reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{101}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{69}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{69}{7} \end{pmatrix}$$

Also die eindeutige Lösung ist: $T_1 = \frac{101}{7}^\circ$, $T_2 = \frac{69}{7}^\circ$, $T_3 = \frac{69}{7}^\circ$.

2. *Wir merken, dass die Temperaturen am Rand des Gitters keinen Einfluss in der Koeffizientenmatrix des LGS, das uns die Lösung gibt, haben. Diese kommen nur in der letzten Spalte vor. Das heißt, dass die ersten drei Spalten der reduzierten Zeilenstufenform der erweiterten Matrix sind genau dieselben wie in Teil 1. Das heißt, dass für alle Temperaturen am Rand, muss man ein LGS mit erweiterter Matrix*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 1 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

für irgendwelche $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$, die von den Temperaturen am Rand abhängig sind. Also die Lösung wird immer eindeutig sein.