Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 15. Dezember 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 7

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Wir bezeichnen mit $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ \exists\, A^{-1} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ mit } A \cdot A^{-1} = I_2\}$ die Gruppe aller (multiplikativ) invertierbaren 2×2 Matrizen mit reellen Einträge. Man überprüfe, dass folgende Zuordnungen injektive Gruppenhomomorphismen definieren.

(**Hinweis:** Sie müssen also auch zeigen, dass die Zuordnung eine Abbildung definiert und auch die Gruppenstruktur des Definitionsbereich erkennen.)

1. $a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
2. $t \longmapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. $a + ib \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ für alle $a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Lösung zu Übung 1.

1. *Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$, also die kanonische Gruppenstruktur ist $(R, +)$. Erstens überprüfen wir aber, dass für alle $a \in \mathbb{R}$, die Matrix*

$$f(a) := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Das ist so, weil $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Weiterhin gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$f(a) \cdot f(b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(a+b).$$

Also $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$. Für die Injektivität reicht es zu bemerken, dass $f(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0$, aslo $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.

2. *Der Definitionsbereich ist* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, *also die Gruppenstruktur wird* $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$ *sein. Die Zuordnung landet in* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, *weil*
$$g(t) := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$
die Inverse $\begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$ *hat. Es gilt auch für alle* $t, s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *dass*
$$g(t)\cdot g(s) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ts & 0 \\ 0 & ts \end{pmatrix} = g(ts).$$
Also $g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^\times, \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$. *Weil* $g(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = 1$, *haben wir auch* $\mathrm{Ker}\, g = \{1\}$, *also* g *ist injektiv.*

3. *Der Definitionsbereich ist* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *also die Gruppenstruktur ist* $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\cdot)$. *Die Invertierbarkeit ist (ohne das Determinanten Kriterium) nicht mehr so offensichtlich, aber für alle* $(a,b) \neq (0,0)$ *haben wir*
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\cdot\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
Also $h(a+ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ *definiert eine Abbildung* $h : \mathbb{C}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. *Für alle* $a+ib, c+id \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *gilt:*
$$\begin{aligned} h(a+ib)\cdot h(c+id) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bcb \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix} \\ &= h((ac-bd)+i(ad+bc)) \\ &= h((a+ib)(c+id)). \end{aligned}$$
Also $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^\times, \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$. *Es gilt auch* $h(a+ib) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 1$ *und* $b = 0 \Leftrightarrow a+ib = 1$, *also* $\mathrm{Ker}\, h = \{1\}$ *und somit ist* h *injektiv.*

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Für jedes Paar $(k,l) \in \{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}$ sei $E_{kl} = (e_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ die Matrix mit
$$e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } (i,j) \neq (k,l) \\ 1 & \text{, wenn } (i,j) = (k,l) \end{cases}$$

1. Man berechne für $n = 3$ die Produkte $E_{1,2}\cdot E_{1,3}$ und $E_{1,2}\cdot E_{2,3}$.
2. Man berechne das Produkt $E_{kl}\cdot E_{rs}$ für beliebige $(k,l),(r,s) \in \{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,n\}$.

Lösung zu Übung 2.

Beim Linksmultiplizieren einer Matrix A *mit* E_{ij} *überlebt nur die* j*-te Zeile von* A, *und diese wird auf der* i*-ten Zeile verschonen. Also* $E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } j \neq k \\ E_{il}, & \text{wenn } j = k \end{cases}$ *Das heißt für Punkt 1, dass*
$$E_{1,2}\cdot E_{1,3} = 0 \qquad \textit{und} \qquad E_{1,2}\cdot E_{2,3} = E_{1,3}.$$