Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Stand: 14. Dezember 2023

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 6

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

1. Man zeige, dass die Menge der positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_{>0} = \{a \in \mathbb{R} \;:\; a > 0\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist.
2. Man zeige, dass die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ und die Gruppe $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ isomorph sind.
3. Sind die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ isomorph? †

Lösung zu Übung 1.

1. *Weil* $1 \in \mathbb{R}_{>0}$ *haben wir* $\mathbb{R}_{>0} \neq \emptyset$*. Es reicht also zu zeigen, dass wenn* $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$*, dann gilt* $xy^{-1} \in \mathbb{R}_{>0}$*. Das gilt weil, aus* $y > 0$ *folgt auch* $y^{-1} = \frac{1}{y} > 0$ *und weil das Produkt zweier reellen positiven Zahlen wieder eine positive Zahl ist.*
2. *Wir definieren* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ *durch*

$$\exp(x) := e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$*, also* $\exp$ *ist ein Gruppenhomomorphismus. Weiterhin, ist* $\exp$ *invertierbar, mit inverse* $\log : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$*, also* $\exp$ *ist ein Isomorphismus.*

3. *Für einen Gruppenhomomorphismus* $f : G \longrightarrow G'$ *gelten allgemein:*
   Wenn $x^n = e \in G$*, dann* $f(x)^n = f(x^n) = f(e) = e \in G'$*.*

Wenn $(\mathbb{R}, +)$ *und* $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ *isomorph wären, dann würde ein Gruppenisomorphismus*

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

geben. Für $x = -1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *gilt* $(-1)^2 = 1$ *und* $-1 \neq 1$*. Sei* $a := f(-1) \in \mathbb{R}$*. Weil* f *injektiv ist, muss* $a = f(-1) \neq f(1) = 0$ *gelten. Wir haben dann*

$$0 = f(1) = f\big((-1) \cdot (-1)\big) = f(-1) + f(-1) = a + a.$$

Aus $2a = 0$ *folgt* $a = 0$ *- ein Widerspruch.*

---

†Hinweis: Gibt es Elementen „endlicher Ordnung" in eine der Gruppen?

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Ein **Integritätsbereich** ist ein kommutativer Ring R mit der Eigenschaft, dass

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0.$$

Zum Beispiel, $\mathbb{Z}$ ist ein Integritätsbereich aber $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist nicht ein Integritätsbereich, weil $[2] \cdot [3] = [0]$ und $[2] \neq [0]$ und $[3] \neq [0]$.

Man zeige, dass ein endlicher Integritätsbereich ein Körper ist.

Lösung zu Übung 2.

Hinweis: "kommutativ" wurde in der ursprünglichen Formulierung nicht explizit verlangt. Die Voraussetzung war aber implizit dabei, da all Körper eine kommutative Multiplikation haben. Also ohne dieser Voraussetzung wäre die Aufgabe trivial gewesen.

Sei $0 \neq a \in R$. Nach der Definition von Körper müssen wir zeigen, dass a invertierbar in R (bezüglich der Multiplikation) ist.

Die Menge $\{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist eine Endliche Menge, also $\exists m > n$ mit $a^m = a^n$. (Sonst ist $\mathbb{N} \longrightarrow \{a^n\}$ durch $n \mapsto a^n$ injektiv, also die Menge $\{a^n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ undendlich). Es folgt also

$$a^m - a^n = a^n(1 - a^{m-n}) = 0$$

Weil R ein Integritätsbereich ist, muss entweder $a^n = 0$ oder $1 - a^{m-n} = 0$. Aber, wieder weil R ein Integritätsbereich ist, kann a^n nicht Null sein, also $a^{m-n} = 1$ und somit existiert $a^{-1} = a^{m-n-1}$, also a ist invertierbar.