Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 29. November 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 5

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

1. Man finde alle Paare $([x],[y]) \in (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$, die beide folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{cases} [6][x]+[3][y] &= [9] \\ [5][x]+[10][y] &= [17] \end{cases}$$

2. Man bestimme alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $[x]$ und $[y]$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, die beide folgende Gleichungen erfüllen, existieren.

$$\begin{cases} [x]+[y] &= [2] \\ [2x]-[3y] &= [3] \end{cases}$$

Lösung zu Übung 1.

1. *In $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sind $[3]$, $[6]$ und $[9]$ nicht invertierbar, weil sie nicht teilerfremd zu 12 sind. Deswegen dürfen wir nicht in der ersten Gleichung kürzen. Wir können diese auch nicht auf der Form $[x]=[\alpha]\cdot[y]+[\beta]$ oder $[y]=[\gamma][x]+[\delta]$ bringen. Wir schauen uns also die 2. Gleichung an.*

   Die $[5]$ ist invertierbar modulo 12, weil $\mathrm{ggT}(5,12)=1$. Es gilt $[5]^{-1}=[5]$, weil $[5]\cdot[5]=[25]=[1]$ in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Wir haben deswegen

$$[5][x]=[-10][y]+[17] \;\Leftrightarrow\; [5][x]=[2][y]+[5] \;\Leftrightarrow\; [x]=[-2][y]+[1].$$

   Die zweite Äquivalenz folgt durch Multiplizieren mit $[5]=[5]^{-1}$.

   (Allgemein gilt "$[\alpha]=0 \Rightarrow\; [5][\alpha]=0$".)

   Also wenn $([x],[y])$ beide Gleichungen erfüllt, dann muss insbesondere $[x]=[-2][y]+[1]$ gelten. Wir setzen das in der 1. Gleichung ein und bekommen:

$$[6]([-2][y]+[1])+[3][y]=[9] \quad\Leftrightarrow\quad [0][y]+[6]+[3][y]=[9].$$

   Wenn wir auf beiden Seiten $[-6]$ addieren, dann bekommen wir

$$[3][y]=[3] \quad\Leftrightarrow\quad [3]([y]-[1])=[0].$$

Wir schauen uns jetzt die Multiplikation mit $[3]$ in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ an:

$\cdot$	$[-5]$	$[-4]$	$[-3]$	$[-2]$	$[-1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[4]$	$[5]$	$[6]$
$[3]$	$[-3]$	$[0]$	$[3]$	$[6]$	$[-3]$	$[0]$	$[3]$	$[6]$	$[-3]$	$[0]$	$[3]$	$[6]$

Aus $[3]([y]-[1]) = [0]$ folgt also $[y]-[1] \in \{[-4],[0],[4]\}$. Weil $[x] = [-2][y]+[1]$, ist die gesuchte Lösungsmenge:

$$\{([-5],[-3]),([-1],[1]),([3],[5])\}.$$

2. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ bekommt man aus der ersten Gleichung:*

$$[y] = [2]-[x].$$

Wir setzten das in der zweiten Gleichung ein: $[5x-9] = [0]$ in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Wir haben zwei Fälle:

$\boxed{\mathrm{ggT}(5,n) = 1}$ $\Rightarrow [5]$ *ist invertierbar, es gibt also eine Lösung:*

$$[x] = [5]^{-1}[9] \qquad \textit{und} \qquad [y] = [2]-[5]^{-1}[9].$$

$\boxed{\mathrm{ggT}(5,n) \neq 1}$ *Weil 5 prim ist, ist der einzige positive Teiler der nicht 1 ist gleich mit 5. Also $\mathrm{ggT}(5,n) = 5$ und insbesondere $5 \mid n$.*

Wir haben aus $[5x-9] = [0] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, dass

$$5x-9 \equiv 0 \bmod n.$$

Das heißt per Definition, dass $n \mid 5x-9$. Also, weil $5 \mid n$ und Teilbarkeit transitiv ist, folgt

$$5 \mid 5x-9.$$

Dann muss auch $5 \mid 9$ gelten - ein Widerspruch.

Also: Das Gleichungssystem hat Lösungen $\Longleftrightarrow \mathrm{ggT}(5,n) = 1$.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Sei M eine nicht leere Menge und sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Sei

$$\mathrm{Abb}(M,\mathbb{R}) := \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \quad : \quad f = \ \text{Abbildung}\},$$

die Menge aller Abbildungen von M nach $\mathbb{R}$. Auf $\mathrm{Abb}(M,\mathbb{R})$ definiert man die Verknüpfung $\star : \mathrm{Abb}(M,\mathbb{R}) \times \mathrm{Abb}(M,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Abb}(M,\mathbb{R})$ durch

$$(f \star g)(x) \quad := \quad f(x) \cdot g(x) \quad \forall\ x \in M,$$

wobei "$\cdot$" die Multiplikation der reellen Zahlen bezeichnet.

1. Man bestimme das neutrale Element für $\star$.
2. Man beschriebe die invertierbare Elemente aus $\mathrm{Abb}(M,\mathbb{R})$ bezüglich $\star$.

Lösung zu Übung 2.

1. *Wenn $e : M \longrightarrow \mathbb{R}$ das neutrale Element ist, dann muss gelten $f \star e = e \star f = f$ für alle $f \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$. Also für jede Abbildung $f \in Abb(M, \mathbb{R})$ müssen wir*

$$f(x) \cdot e(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in M$$

haben. Das führt uns zu $e : M \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$e(x) = 1 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(Der erste Teil muss nicht Teil des Beweises. Es reicht zu zeigen, dass die hier definierte Abbildung e das neutrale Element ist.)

2. *Wenn $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ invertierbar ist, mit Inverse $f' : M \longrightarrow \mathbb{R}$, dann muss*

$$f(x) \cdot f'(x) = 1 \qquad \forall\, x \in M$$

gelten. Also $f' : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f'(x) = \frac{1}{f(x)} \qquad \forall\, x \in M.$$

Das ist für alle x definiert genau dann, wenn $f(x) \neq 0$ für alle x gilt.

Also: f ist genau dann invertierbar bezüglich $\star$, wenn $f(x) \neq 0$ für alle x.

Zusatzaufgabe 3.

Man zeige, dass $1 + 2^2 + 3^{3^3}$ nicht das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.
(**Hinweis:** $3^{3^3} = 3^{(3^3)} = 3^{27}$.)

(Erste Phase der Mathe Olympiade, 5.Klasse, Bukarest 1998)

Lösung zu Übung 5.

Man merke, dass $n^2 \equiv 0$ oder $1 \bmod 3$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Aber $1 + 2^2 + 3^{3^3} \equiv 2 \bmod 3$.

Zusatzaufgabe 4.

Der 13. Oktober 2023 war ein Freitag.

1. Was für ein Wochentag wird der 13. Oktober 3032 sein[§]
2. Zeigen Sie, dass jedes Jahr mindestens einen “Freitag der 13.” hat.
3. Wie viele “Freitag der 13.” kann es maximal in einem Jahr geben?

Lösung zu Übung 7.

1. *Von 13. Oktober 2023 bis 13. Oktober 3032 sind es 1009 Jahre. Ein Jahr hat 365 Tage, außer wenn es ein Schaltjahr ist. Schaltjahre haben ein Tag mehr: 366. Ein Jahr ist ein Schaltjahr, wenn es durch 4 teilbar ist, außer wenn es durch 100, aber nicht durch 400 teilbar ist. Zum*

[§] Hinweis: Papst Gregor XIII.

Beispiel 2100, 2200, 2300 sind keine Schaltjahre, aber 2400 ist ein Schaltjahr.
Wir haben also

$$365 \cdot 1009 + 252 - 10 + 2 \quad \textit{Tage.}$$

Es reicht aber wenn wir modulo 7 rechnen:

$$365 \equiv 1 \bmod 7, \quad 1009 \equiv 1 \bmod 7, \quad 252 \equiv 0 \bmod 7, -8 \equiv -1 \bmod 7.$$

Also $[365 \cdot 1009 + 252 - 8]_7 = [1 \cdot 1 + 0 - 1]_7 = [0]_7$. *Das heißt, der 13. Oktober 3032 wir wieder ein Freitag sein.*

2. *Wir berechnen dafür die Tage in einem Monat modulo 7, und addieren diese auch.*

Monat:	*J*	*F*	*M*	*A*	*M*	*J*	*J*	*A*	*S*	*O*	*N*	*D*
Tage mod 7:	3	$\frac{0}{1}$	3	2	3	2	3	3	2	3	2	3
Normaljahr:	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	1
Schaltjahr:	3	4	0	2	5	0	3	6	1	4	6	2

Die Zahlen nach / stehen für Schaltjahre. Da in beiden Fälle alle Restklassen vorkommen: $0, 1, \ldots, 6$, *heißt es, dass jeder numertier Tag des Monats mindestens ein Mal an jedem Wochentag fällt.*

3. *3 Mal, weil die 3 in nich-Schaltjahre 3 Mal vorkommt. In einem Schaltjahr kann es höchstens 2 Mal passieren.*

Zusatzaufgabe* 5.

Eine natürliche Zahl n schreiben wir im dekadischen System mit Hilfe der Ziffern $0, \ldots, 9$. Wir schreiben dafür $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}$ mit $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$. Das heißt, dass $n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i$. Zum Beispiel, wenn $k = 2$, $a_2 = 4$, $a_1 = 2$ und $a_0 = 0$ dann ist $\overline{a_2 a_1 a_0} = 420$.
Die **Quersumme** von $n = \overline{a_k \ldots a_1 a_0}$ ist

$$Q(n) := \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

1. Man zeige, dass $9 \,|\, n \;\Leftrightarrow\; n \,|\, Q(n)$.

*** 2. Was ist die Quersumme der Quersumme der Quersumme von 4444^{4444}? †

Lösung zu Übung 8.

1. *Wir rechnen in* $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ *und zeigen mehr, nämlich* $n \equiv AQ(n) \bmod 11$. *Wir brauchen dafür nur* $10 \equiv -1 \bmod 11$.
2. *In* $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ *haben wir* $4444 = 4 \cdot 11 \cdot 101 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = -2$, *also* $4444^{4444} \equiv 2^{4444}$. *Weiterhin haben wir* $2^6 \equiv 1$, *also* $2^{4444} = 2^{6 \cdot 740 + 4} = 2^4 = 7$. *Wir wissen allgemein auch dass* $Q(n) \equiv n \bmod 9$. *Die Lösung bekommen wir, weil* $Q(Q(Q()))$ *viel kleiner wird:* $4444^{4444} < 10000^{4444} = 10^{5 \cdot 4444}$. *Also* $Q(4444^{4444} < 9 \cdot 5 \cdot 4444 < 200000$. *Dann ist* $Q(Q(4444^{4444})) \leq 9 \cdot 5 = 45$, *und* $Q(Q(Q(4444^{4444}))) \leq 3 + 9 = 12$. *Die einzige natürliche Zahl die kongruent zu 7 modulo 9 ist und auch kleiner als 12, ist 7. Also* $Q(Q(Q(4444^{4444}))) = 7$.

† Hinweis: Rechnen Sie Modulo 9, und geben Sie auch eine obere Schranke für $Q(Q(Q(4444^{4444})))$ an.