Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 29. November 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 4

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H03.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 15. November 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Sei $\sim$ die Relation of $\mathbb{R}^2$ definiert durch $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ mit $(a - c, b - d) = (t, t)$.

1. Man zeige, dass $(4, 6) \sim (2, 4)$.
2. Man zeige, dass $(4, 6) \not\sim (4, 2)$.
3. Man beweise, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.
4. Man beschreibe die Äquivalenzklasse von $(4, 6)$ als Lösungsmenge einer Gleichung.
   (Z.B. eine Parabel kann man als $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y - x^2 = 0\}$ beschreiben.)
5. Man beschreibe die Äquivalenzklasse von $(4, 6)$ parametrisch.
   (Z.B. eine Parabel kann man als $\{(t, t^2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ beschreiben.)
6. Man gebe eine geometrische Beschreibung der Äquivalenzklassen und zeichnen Sie eine Skizze dafür.
7. Man finde ein Repräsentantensystem für $\sim$.

Lösung zu Übung 1.

Wir beweisen zu erst folgende Bemerkung:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a - c = b - d.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ *Wenn $(a, b) \sim (c, d)$, dann $\exists t \in \mathbb{R}$, sodass $(a - c, b - d) = (t, t)$. Das ist äquivalent zu $a - c = t$ und $b - d = t$, also $a - c = b - d$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Wenn $a - c = b - d$, dann setzen wir $t := a - c \in \mathbb{R}$. Es gilt dann $(a - c, b - d) = (t, t)$, also per Definition $(a, b) \sim (c, d)$.*

1. *Es gilt $4 - 2 = 6 - 4 = 2$, also nach der Bemerkung $(4, 6) \sim (2, 4)$*
2. *Es gilt $4 - 4 = 0 \neq 4 = 6 - 2$. Also nach der Bemerkung $(4, 6) \not\sim (4, 2)$.*

3. ***Reflexivität:*** *Für alle* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *gilt* $a-a=b-b=0$. *Also* $(a,b) \sim (a,b)\ \forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   Symmetrie: *Wenn* $(a,b) \sim (c,d)$, *dann* $a-c=b-d$. *Wir multiplizieren die Gleichheit mit* -1 *und bekommen* $c-a=d-b$, *also, nach der Bemerkung, dass* $(c,d) \sim (a,b)$.

   Transitivität: *Seien* (a,b), (c,d) *und* $(e,f) \in \mathbb{R}^2$, *sodass*

   $$(a,b) \sim (c,d) \qquad \text{und} \qquad (c,d) \sim (e,f).$$

   Es gilt also $a-c=b-d$ *und* $c-e=d-f$. *Wir addieren die beiden Seiten und bekommen:*

   $$a-e=(a-c)+(c-e)=(b-d)+(d-f)=b-f.$$

   Es folgt also $(a,b) \sim (e,f)$.

4. *Wir haben* $(a,b) \in [(4,6)]$ *genau dann, wenn* $(a,b) \sim (4,6)$, *also genau dann wenn* $a-4=b-6$ *Das ist äquivalent zu* $b-a=2$. *Also*

   $$[(4,6)] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y-x=2\}.$$

5. *Wenn wir die Definition anstelle der Bemerkung verwenden, dann haben wir*

   $$(a,b) \in [(4,6)] \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R}, \textit{sodass } (a-4, b-6) = (t,t).$$

   Das ist äquivalent zu $a=4+t$ *und* $b=6+t$. *Es gilt also*

   $$[(4,6)] = \{(4+t, 6+t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

6. *Die Äquivalenzklassen sind genau alle Geraden in* $\mathbb{R}^2$, *die parallel zu der Diagonale* $\Delta = (x,x) \ : \ x \in \mathbb{R}$ *sind.*

7. *Jede Menge die jede Parallele zu der Diagonale in genau einem Punkt trifft ist ein Repräsentantensystem. Zum Beispiel* $\{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ *ist ein Repräsentantensystem.*

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$, die verträglich mit der Addition ist. Das heißt, dass

$$\forall a,b,x,y \in \mathbb{Z} \ \text{ gilt:} \qquad a \sim x \ \text{ und } b \sim y \quad \Rightarrow \quad a+b \sim x+y \tag{3}$$

1. Man zeige, dass $[0]_\sim$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$ ist.
2. Man zeige, dass

   $$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a-b \in [0]_\sim.$$

Hinweis: Sie brauchen für Teil 1 nur die Axiome aus der Definition von Untergruppe (siehe das non-Skript) für $[0]_\sim \subseteq \mathbb{Z}$ zu überprüfen.

Lösung zu Übung 2.

1. *Wir überprüfen die drei Untergruppen Axiome:*

   Abgeschlossenheit: *Es seien* $a, b \in [0]_\sim$. *Das bedeutet per Definition, dass* $a \sim 0$ *und* $b \sim 0$. *Aus (3) folgt dann:*

   $$a + b \sim 0 + 0 = 0,$$

   also $a + b \in [0]_\sim$.

   Neutrales Element: *Per Definition von Äquivalenzklasse und Reflexivität gilt* $0 \in [0]_\sim$. ***Inverses Element:*** *Sei* $x \in [0]_\sim$ *beliebig. Es gilt also* $x \sim 0$. *Wieder aus der Reflexivität haben auch* $-x \sim -x$. *Dann folgt aus (3), dass*

   $$x + (-x) \sim 0 + (-x)$$

   Also $0 \sim -x$, *und somit* $-x \in [0]_\sim$.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ *Aus* $a \sim b$ *und* $-b \sim -b$ *folgt aus (3), dass*

   $$a - b \sim b - b$$

   also $a - b \in [0]_\sim$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ *Wenn* $a - b \in [0]_\sim$, *dann haben wir* $a - b \sim 0$. *Weil* $b \sim b$, *folgt wieder aus (3), dass*

   $$(a - b) + b \sim 0 + b$$

   und aus der Assoziativität der Addition der ganzen Zahlen folgt $a \sim b$.