Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Stand: 15. November 2023

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 3

L Ö S U N G E N

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Man zeige oder man widerlege:

Für alle Mengen A und für alle Familien von Mengen $(B_i)_{i\in I}$ gilt:

$$A \setminus \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) = \bigcap_{i\in I} (A \setminus B_i).$$

Lösung zu Übung 1.

Die Aussage ist wahr. Wir zeigen direkt, dass für beliebige Mengen A und B_i ein Element genau dann in der linken Seite der Gleichheit liegt, wenn es in der rechten Seite liegt.

$$\begin{aligned} x \in A \setminus \left(\bigcup_{i\in I} B_i \right) &\Leftrightarrow \quad x \in A \quad \textit{und} \quad \forall\, i \in I \textit{ gilt } x \notin X \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, i \in I \textit{ gilt } x \in A \quad \textit{und} \quad x \notin B_i \\ &\Leftrightarrow \quad \forall\, i \in I \textit{ gilt } x \in \mathbb{A} \setminus B_i \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{i\in I} A \setminus B_i). \end{aligned}$$

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Sei $f : A \longrightarrow B$ eine Abbildung und seien $X, Y \subseteq A$ zwei Teilmengen.

1. Man zeige, dass $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$.
2. Man zeige, dass $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$.
3. Man zeige, dass f genau dann injektiv ist, wenn

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) \qquad \forall X, Y \subseteq A.$$

Lösung zu Übung 2.

1. $\boxed{\subseteq}$ *Es sei* $b \in f(X \cup Y)$. *Es existiert also* $a \in X \cup Y$, *sodass* $f(a) = b$. *Dass* $a \in X \cup Y$, *bedeutet* $a \in X$ *oder* $a \in Y$.

   Wenn $a \in X$, *dann gilt* $b = f(a) \in f(X) \subseteq f(X) \cup f(Y)$.
   Wenn $a \in Y$, *dann gilt* $b = f(a) \in f(Y) \subseteq f(X) \cup f(Y)$.

   In beiden Fällen gilt also $b \in f(X) \cup f(Y)$.

   $\boxed{\supseteq}$ *Es sei* $b \in f(X) \cup f(Y)$. *Es gilt also* $b \in f(X)$ *oder* $b \in f(Y)$. *Das heißt per Definition*

$$\big(\exists x \in X,\ \textit{sodass } f(x) = b\big) \quad \textit{oder} \quad \big(\exists x \in Y,\ \textit{sodass } f(x) = b\big)$$

   Das bedeutet, es existiert ein $x \in X \cup Y$, *sodass* $b = f(x)$, *also* $b \in f(X \cup Y)$.

2. *Sei* $b \in f(X \cap Y)$. *Es existiert also* $a \in X \cap Y$ *mit* $f(a) = b$. *Weil* $a \in X$, *folgt* $b = f(a) \in f(X)$ *und, weil* $a \in Y$, *folgt* $b = f(a) \in f(Y)$. *Also* $b \in f(X) \cap f(Y)$.

3. $\boxed{\Rightarrow}$ *Sei* f *injektiv und sei* $b \in f(X) \cap f(Y)$. *Es gilt also*

$$b \in f(X) \quad \textit{und} \quad b \in f(Y)$$

   Es existiert also ein $x \in X$ *mit* $b = f(x)$ *und es existiert ein* $y \in Y$ *mit* $b = f(y)$. *Also*

$$f(x) = f(y) = b.$$

   Aus der Injektivität folgt aber $x = y$, *und somit* $x \in X \cap Y$. *Also* $b = f(x) \in f(X \cap Y)$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ *Es seien* x, y *mit* $f(x) = f(y) =: b$. *Wir definieren die Mengen* $X := \{x\}$ *und* $Y := \{y\}$. *Es gilt nach Voraussetzung, dass*

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$$

   Weil $f(x) = f(y) = b$ *gilt, haben wir* $f(X) = f(Y) = \{b\}$. *Also*

$$f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y) = \{b\} \cap \{b\} = \{b\} \neq \emptyset.$$

   Das heißt, dass $X \cap Y \neq \emptyset$. *Weil es Mengen mit einem Element sind, muss also* $X = Y$ *gelten. Also* $\{x\} = \{y\}$ *und somit* $x = y$.

   Wir haben somit gezeigt, dass $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. *Also* f *ist injektiv.*