Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 15. November 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 2

LÖSUNGEN

Aufgabe 1. **2 Punkte**

Man betrachte folgende Aussage, die von den Variablen $a, b \in \mathbb{R}$ abhängig ist:

$$A(a,b): \quad a - b = 3.$$

Man beweise, dass folgende Aussage falsch ist:

$$\big(\forall\ a \in \mathbb{R},\ \ \exists\ b \in \mathbb{R},\ \text{sodass}\ A(a,b)\big) \Rightarrow \big(\exists\ b \in \mathbb{R},\ \ \text{sodass}\ \ \forall\ a \in \mathbb{R}\ \ A(a,b)\big).$$

Lösung zu Übung 1.

Eine Implikation $P \Rightarrow Q$ ist falsch, wenn P wahr ist und Q falsch ist. In diesem Fall ist

$$P : \forall\ a \in \mathbb{R},\ \ \exists\ b \in \mathbb{R},\ \textit{sodass}\ A(a,b).$$

Um das zu zeigen, sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Definiere $b := a - 3$. Dann gilt $A(a, a-3) : a - (a-3) = 3$, und das ist wahr. Wir betrachten dann

$$Q : \exists\ b \in \mathbb{R},\ \ \textit{sodass}\ \ \forall\ a \in \mathbb{R}\ \ A(a,b)$$

Nehmen wir an, dass Q wahr ist. Sei $b \in \mathbb{R}$ fixiert, sodass $\forall\ a \in \mathbb{R}\ \ A(a,b)$. Das heißt

$$\forall\ a \in \mathbb{R}\ \ \textit{gilt}\ \ a - b = 3.$$

Das heißt das alle reellen Zahlen gleich mit der fixierten Zahl $b - 3$ sind. Das ist falsch, also ist Q falsch.

Wir haben also gezeigt, dass $P \Rightarrow Q$ falsch ist.

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Man betrachte die Menge $M = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \ : \ \ a^2 \cdot (b+1) = 800\}$.

1. Man liste alle Elemente von M auf.

   (Man muss dabei auch begründen warum es genau diese sind.)
2. Ist M der Graph einer Abbildung?

Lösung zu Übung 2.

1. *Die Primfaktorzerlegung von* 800 *ist*

$$800 = 2^5 \cdot 5^2$$

Die ganze Zahl a^2 *teilt* 800, *also muss die Form*

$$(2^k 5^\ell)^2$$

haben, wobei $k, \ell \in \mathbb{N}$ *mit* $0 \leqslant 2k \leqslant 5$ *und* $0 \leqslant 2\ell \leqslant 2$. *Also* $k \in \{0, 1, 2\}$ *und* $\ell \in \{0, 1\}$. *Alle Kombinationen sind möglich, also*

$$a^2 = 1, 4, 16, 25, 100 \quad \textit{oder } 400.$$

Jedes a^2 *bestimmt* $b + 1$, *also auch* b, *eindeutig:*

$$b = 799, 199, 49, 31, 7, 1.$$

Für jeden Wert von a^2 *haben wir zwei mögliche Werte für* a*: einen positiven und einen negativen. Es gilt also*

$$M = \{(\pm 1, 799), (\pm 2, 199), (\pm 4, 49), (\pm 5, 31), (\pm 10, 7), (\pm 20, 1)\},$$

wobei $(\pm 1, 799)$ *steht für zwei Elemente:* $(1, 799)$ *und* $(-1, 799)$, *usw.*

2. *Die Menge* M *erfüllt hat die Eigenschaft, dass es keine zwei geordnete Paare enthält mit demselben ersten Element.* M *ist also der Graph einer Abbildung mit Definitionsbereich*

$$A = \{-20, -10, -5, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 10, 20\}.$$

Als Wertebereich haben wir mehr Freiheit in der Auswahl. Die einzige Einschränkung ist $\{1, 7, 31, 49, 199, 799\} \subseteq B$.