Freie Universität Berlin
Institut für Mathematik

Stand: 1. November 2023

WiSe23/24
A. Constantinescu
J. Plock
F. Ugolini

Lineare Algebra 1 – Hausaufgabe 1

Abgabe via Whiteboard als `Name_LA1_H01.pdf` **bis 18:00 am Mittwoch**, den 24. Oktober 2023.

Die Antworten sind stets zu begründen, inklusiv Beispiele.

Aufgabe 1. **2 Punkte**

1. `Lokale Mathematik Olympiade für die 4. Klasse, Rumänien, 1986:`

   Wenn Ionel[†] zwei Mathematikhefte und zwei Zeichenhefte kaufen würde, würde er 12 Lei[‡] bezahlen, aber wenn er zwei Mathematikhefte und drei Zeichenhefte kaufen würde, würde er einen Leu mehr bezahlen. Wie viel kostet ein Heft von jeder Art?

2. Formulieren Sie die Aufgabe als ein lineares Gleichungssystem und zeichnen Sie die Lösungsmenge jeder Gleichung in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$.

Lösung zu Übung 1.

1. *Man finde $m, z \in \mathbb{Q}_{>0}$, sodass*

$$\begin{aligned} 2m + 2z &= 12 \\ 2m + 3z &= 13 \end{aligned}$$

2. *Wir setzen $2m+2z = 12$ in der zweiten Gleichung ein, und bekommen $12+z = 13$, also $z = 1$. Wir setzen dann $z = 1$ in der ersten Gleichung ein, und bekommen $2m + 2 = 12$, also $m = 5$. Also ein Mathematikheft kostet 5 Lei und ein Zeichenheft kostet 1 Leu.*

Aufgabe 2. **2 Punkte**

Eine **Implikation** ist eine Aussage der Form:

$$\textbf{Wenn } \text{Aussage } A \text{ wahr ist, } \textbf{dann} \text{ ist Aussage } B \text{ wahr.} \tag{1}$$

Die Aussage A heißt **Voraussetzung** und die Aussage B heißt **Schlussfolgerung**. Implikationen sind nicht immer in der Form (1) gegeben. Zum Beispiel:

Die Summe zweier gerader Zahlen ist gerade. (2)

ist eine Implikation. Man kann das durch umformulieren deutlicher machen:

Wenn a und b gerade Zahlen sind, dann ist $a + b$ eine gerade Zahl.

Formulieren Sie folgende Aussagen auch als ***Wenn*** A, ***dann*** B:

[†] Diminutiv des Namens *Ion*, die Rumänische Variante von Johann; also "Johannchen".
[‡] Die Rumänische Währung: Leu, Pl.: Lei.

1. *Alle Katzen sind blau.*
2. *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadraten der Längen der Kathäten gleich mit dem Quadrat der Länge der Hypothenuse.*
3. *Für alle ganze Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ und für alle Primzahlen p gilt $a^p \equiv a \mod p$.*
4. *Es gibt keine positive ganze Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$, sodass $a^n + b^n = c^n$ mit $n \in \mathbb{N}_{>2}$.*

Lösung zu Übung 2.

1. *Wenn Bella eine Katze ist, dann ist Bella blau.*
2. *Wenn $\triangle ABC$ ein Dreick ist und $\angle BAC = 90°$, dann gilt $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$.*
3. *Wenn p eine Primzahl ist, dann gilt für alle $a \in \mathbb{Z}$:*

$$a^p \equiv a \mod p.$$

4. *Wenn $a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $a^n + b^n = c^n$, dann $n \leqslant 2$.*

Zusatzaufgabe 3.

Die Summe von drei Zahlen beträgt 1 229. Die zweite Zahl ist doppelt so groß wie die erste und um 14 kleiner als die dritte.

1. Formulieren Sie die Aufgabe als ein lineares Gleichungssystem.
2. Finden Sie die drei Zahlen.

Lösung zu Übung 3.

1.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1229 \\ 2x - y &= 0 \\ y - z &= -14 \end{aligned}$$

2. *Wir bezeichnen die drei Zahlen mit x, y, z. Aus der zweiten Bedingung haben wir $y = 2x$ und aus der dritten Bedingung $y = z - 14$. Also $z = y + 14 = 2x + 14$. Die erste Bedingung ist*

$$x + y + z = 1229$$

Wenn wir y und z einsetzen, dann bekommen wir:

$$x + 2x + 2x + 14 = 1229.$$

Also $5x = 1215$, und somit

$$x = 243, \quad y = 486, \quad z = 500.$$

Zusatzaufgabe 4.

Man ersetze in der Reihe hier unten die $\star$ mit natürlichen Zahlen, sodass die Summe drei hintereinanderfolgender Zahlen in der Kette 10 ist:

$$3 \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star \quad 2 \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star$$

Man formuliere auch diese Aufgabe als ein lineares Gleichungssystem.

Lösung zu Übung 4.

Wir geben jedem Stern einen Namen:

$$3 \quad a \quad b \quad c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad 2 \quad h \quad i \quad j \quad k$$

Wir haben also $3+a+b=10$ *und* $a+b+c=10$, *also* $a+b=7$ *und* $c=3$. *Ähnlich haben wir auch* $d+e=7$ *und* $f=3$, *und* $g+2=7$ *und* $h=3$ *und* $i+j=7$ *und* $k=3$. *Also* $g=5$ *also* $e=2$ *also* $d=5$ *usw. Die Lösung ist also*

$$3 \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 3$$

Zusatzaufgabe 5.

Formulieren Sie die folgenden Aussagen als " ***Wenn*** A, ***dann*** B":

1. *Alle Potenzen der natürlichen Zahl 2 sind gerade Zahlen.*
2. *Eine Zahl die durch 5 teilbar ist, hat als letzte Ziffer entweder eine 0 oder eine 5.*
3. *Die Zahlen, deren Quersumme*[†] *nicht durch 9 teilbar ist, sind selber nicht durch 9 teilbar.*
4. *Es gibt keine reellen Zahlen mit negativen Quadraten.*

Lösung zu Übung 5.

1. *Wenn* a *eine Potenz von 2 ist, dann ist 2 eine gerade Zahl.*
2. *Wenn* n *durch 5 teilbar ist, dann ist die letzte Ziffer von* n *eine 0 oder eine 5.*
3. *Wenn die Quersumme von* n *nicht durch 9 teilbar ist, dann teilt 9 nicht* n.
4. *Wenn* a *eine reelle Zahl ist, dann gilt* $a^2 \geqslant 0$.

Zusatzaufgabe 6.

Wenn 1,5 Hühner in 1,5 Tagen 1,5 Eier legen, wie viele Eier legen dann 7 Hühner in 9 Tagen?

Lösung zu Übung 6.

Wir haben drei Variablen: Hühner (h), Tage (t), und Eier (e). Wenn wir eine davon fixieren, dann sind die anderen zwei proportional. Zum Beispiel, wenn wir die Zeit bei 1,5 Tage fixieren, dann gilt: 3 Hühner legen 3 Eier in 1,5 Tage, *und auch*

1 Huhn legt 1 Ei in 1,5 Tage.

Jetzt bleibt h fix, und wir multiplizieren Tage, also auch Eier mit 6, und bekommen:

1 Huhn legt 6 Eier in 9 Tage.

Jetzt bleibt t fix, und wir multiplizieren Hühner, also auch Eier mit 7, und bekommen:

7 Hühner legen 42 Eier in 9 Tage.

[†] Die Summe aller Ziffern.

Zusatzaufgabe 7.**

Man ersetze alle der folgenden $\times$ mit Ziffern, sodass folgende lange Division stimmt:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&\times&:&\times&\times&\times&=&\times&\times&8&\times&\times\\
-&\times&\times&\times\\
\cline{2-4}
&&\times&\times&\times&\times\\
&&-&\times&\times&\times\\
\cline{3-5}
&&&&\times&\times&\times&\times\\
&&&-&\times&\times&\times&\times\\
\cline{4-8}
&&&&&&&0
\end{array}$$

Keine der drei Anfangsziffern darf Null sein. Ein Beispiel von langer Division ist:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
&1&3&3&3&2&:&1&3&2&=&1&0&1\\
-&1&3&2\\
\cline{2-4}
&&&1&3&2\\
&&-&1&3&2\\
\cline{4-6}
&&&&&0
\end{array}$$

Lösung zu Übung 7.

$$10020316 : 124 = 80809$$

Wie kommt man darauf?

- *Sei abc der Divisor. (Die Zahl nach “:”).*
- *Sei $xy8zw$ das Quotient. (Die Zahl nach “=”).*
- *Wir wissen, dass $8 \cdot abc$ dreistellig ist.*
- *Aus der Form der Tabelle haben wir $y = z = 0$.*
- *Wir wissen aus der letzten Subtraktion, dass $w \cdot abc$ eine 4-stellige Zahl ist. Also $w > 8$, also $w = 9$.*
- *Wir wissen aus der ersten Subtraktion, dass die Differenz zwischen $x \cdot abc$ und eine 4-stellige Zahl, zwei-stellig ist.*
- *Wenn $x < 8$, dann ist $x \cdot abc$ um abc kleiner als $8 \cdot abc$, das kleiner als 1000 ist. Dann könnte aber die erste Differenz nicht zweistellig sein. Wenn $x = 9$, dann wäre $x \cdot abc$ 4-stellig. Also $x = 8$ und wir haben*
$$xy8zw = 80809.$$
- *Weil $8 \cdot abc$ dreistellig ist, folgt $8 \cdot abc < 1000$, also $abc < \frac{1000}{8} = 125$.*
- *Damit die zweite Differenz zweistellig ist, muss die erste Differenz nicht größer als 10 sein. Sonst wäre die zweite Differenz größer als $11 \times \times - 8 \cdot abc$, also dreistellig.*
- *Also $8 \cdot abc > 990$, das heißt, $abc > 123$.*
- *Es bleibt also nur $abc = 124$.*
- *Um die erste Zahl zu finden bleibt uns nur 124 mit 80809 zu multiplizieren.*