MENGEN

MATHEMATIK ENTDECKEN 1

Alexandru Constantinescu

Freie Universität Berlin

Wintersemester 2023/2024

Definition (Cantor 1895)

Unter einer ‚**Menge**' verstehen wir jede **wohldefinierte** Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen. In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$M = \{m\}.$$

Zwei Mengen M und N sind gleich genau dann wenn:

$$(m \in M \Rightarrow m \in N) \;\text{ und } (n \in N \Rightarrow n \in M).$$

Die erste Implikation bedeutet M ist eine **Teilmenge** von N. Man schreibt:

$$M \subseteq N.$$

MENGEN DEFINIERT MAN

durch Auflisten der Elemente:

1. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
2. $\{Haus, Hund, Katze, \clubsuit, \{1, 2, 3\}, 100, 0\%\ast :)\}$.
3. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

   In dieser Vorlesung: $0 \in \mathbb{N}$.
4. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
5. $X = \{1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28, \ldots\}$

MENGEN DEFINIERT MAN

durch eine Eigenschaft:

$$\{x \quad : \quad \text{hat die Eigenschaft } E\} \qquad \text{oder}$$

$$\{x \in M \mid x \text{ hat die Eigenschaft } E\}.$$

1. $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.
2. $2\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 2 teilbar}\}$.
3. **Achtung:** $\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ ist unklar.
   - 3.1 $\{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.
   - 3.2 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.
   - 3.3 $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.
4. $g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x = 7\}>$

MENGEN DEFINIERT MAN

durch eine Formel oder einen Ausdruck für gewisse Elemente einer Menge:

$$\{F(x, y, \ldots) \mid x, y, \ldots \in M\}.$$

1. $2\mathbb{Z} = \{2 \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$.
2. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ und } q \neq 0\}$.
3. $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ wobei $i^2 = -1$.
4. $g = \{(3, 0) + t(-1, 4) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$.