THE

MATRIX

M A T R I Z E N

L I N E A R E A   A L G E B R A   1

27. November 2023

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme

Man finde alle $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, sodass

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 2w + 1 & = & 0 \\ z + 2(x + w) - 4y + 1 & = & 2 \\ 3(x - 2y) & = & -(4w + z) \end{array} \right.$$

Lineare Gleichungssysteme

Man finde alle $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, sodass

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 2w + 1 & = & 0 \\ z + 2(x + w) - 4y + 1 & = & 2 \\ 3(x - 2y) & = & -(4w + z) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 0 \cdot z + 2 \cdot w = -1 \\ 2 \cdot x + (-4) \cdot y + 1 \cdot z + 2 \cdot w = 1 \\ 3 \cdot x + (-6) \cdot y + 1 \cdot z + 4 \cdot w = 0 \end{cases}$$

Lineare Gleichungssysteme

Man finde alle $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{cases} 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 0 \cdot z + 2 \cdot w = -1 \\ 2 \cdot x + (-4) \cdot y + 1 \cdot z + 2 \cdot w = 1 \\ 3 \cdot x + (-6) \cdot y + 1 \cdot z + 4 \cdot w = 0 \end{cases}$$

Lineare Gleichungssysteme

Man finde alle $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{cases} 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 0 \cdot z + 2 \cdot w = -1 \\ 2 \cdot x + (-4) \cdot y + 1 \cdot z + 2 \cdot w = 1 \\ 3 \cdot x + (-6) \cdot y + 1 \cdot z + 4 \cdot w = 0 \end{cases}$$

Lineare Gleichungssysteme

Man finde alle $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{cases} 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 0 \cdot z + 2 \cdot w = -1 \\ 2 \cdot x + (-4) \cdot y + 1 \cdot z + 2 \cdot w = 1 \\ 3 \cdot x + (-6) \cdot y + 1 \cdot z + 4 \cdot w = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

Lineare Gleichungssysteme

Man finde alle $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{cases} 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 0 \cdot z + 2 \cdot w = -1 \\ 2 \cdot x + (-4) \cdot y + 1 \cdot z + 2 \cdot w = 1 \\ 3 \cdot x + (-6) \cdot y + 1 \cdot z + 4 \cdot w = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) = \left(A \mid \underline{b} \right) \in \mathrm{Mat}_{3,5}(\mathbb{R})$$

Lineare Gleichungssysteme

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \underline{b}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right) = \left(A \;\middle|\; \underline{b} \right) \in \mathrm{Mat}_{3,5}(\mathbb{R})$$

Lineare Gleichungssysteme

Man finde alle $\underline{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, sodass

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Lineare Gleichungssysteme

Man finde $\mathcal{L}(A \,|\, \underline{b}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A \cdot \underline{x} = \underline{b}\} \subset \mathbb{R}^4$

Matrizen

$m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\qquad$ $R =$ kommutativer Ring mit 1 $\qquad$ $a_{i,j} \in R$

Matrizen

$m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\qquad$ $R =$ kommutativer Ring mit 1 $\qquad$ $a_{i,j} \in R$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Matrizen

$m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ $R =$ kommutativer Ring mit 1 $a_{i,j} \in R$

$$\left(\quad a_{i,j} \quad \right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

M a t r i z e n

$m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\qquad$ $R =$ kommutativer Ring mit 1 $\qquad$ $a_{i,j} \in R$

$$(a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Matrizen

$m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\qquad$ $R =$ kommutativer Ring mit 1 $\qquad$ $a_{i,j} \in R$

$$(a_{i,j}) = A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$$

Matrizen

$m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\qquad$ $R =$ kommutativer Ring mit 1 $\qquad$ $a_{i,j} \in R$

$$(a_{i,j}) = A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(R)$$

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \longrightarrow R.$$

Matrizen

$m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\qquad$ $R =$ kommutativer Ring mit 1 $\qquad$ $a_{i,j} \in R$

$$\begin{pmatrix} a_{\mathbf{1},1} & \dots & a_{\mathbf{1},n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\mathbf{m},1} & \dots & a_{\mathbf{m},n} \end{pmatrix}$$

$i =$ **Zeilenindex** $\qquad$ $j =$ Spaltenindex.

Matrizen

$m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\qquad$ $R =$ kommutativer Ring mit 1 $\qquad$ $a_{i,j} \in R$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$i =$ Zeilenindex $\qquad$ $j =$ Spaltenindex.

Der **Typ** der Matrix: $\quad (m, n) \quad$ oder $\quad m \times n$

M a t r i z e n

$m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ $\qquad$ $R =$ kommutativer Ring mit 1 $\qquad$ $a_{i,j} \in R$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Für $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m,n}(R)$ und $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{p,q}(S)$ gilt:

$A = B \Leftrightarrow m = p$ und $n = q$ und $R = S$ und $a_{ij} = b_{ij} \ \forall\ i, j.$

Matrizen

Eine **Zeilenmatrix** ist eine $1 \times n$ Matrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 1-i & \pi & e^{i\pi} \end{pmatrix}$$

Matrizen

Eine Zeilenmatrix ist eine $1 \times n$ Matrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 1-i & \pi & e^{i\pi} \end{pmatrix}$$

Eine **Spaltenmatrix** ist eine $m \times 1$ Matrix.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1-i \\ \pi \\ e^{i\pi} \end{pmatrix}$$

Teilmatrizen

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Teilmatrizen

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Teilmatrizen

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Teilmatrizen

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

$I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ und $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ definieren die Teilmatrix $A|_{I \times J}$.

$$A|_{I \times J} := \left(a_{i,j}\right)_{i \in I, j \in J} \in \mathrm{Mat}_{(\#I) \times (\#J)}(R)$$

Zeilen und Spalten

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Zeilen und Spalten

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Zeilen und Spalten

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Zeilen und Spalten

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Zeilen und **Spalten**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Zeilen und **Spalten**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Zeilen und **Spalten**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Zeilen und **Spalten**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \color{red}{a_{1,4}} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \color{red}{a_{2,4}} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \color{red}{a_{3,4}} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & \color{red}{a_{4,4}} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Zeilen und **Spalten**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Zeilen und **Spalten**

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

Zeilen und Spalten

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

i-te Zeile von A: $\quad Z_{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{i},1} & \dots & a_{\mathbf{i},n} \end{pmatrix}$

Zeilen und Spalten

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \end{pmatrix}$$

i-te Zeile von A: $\quad Z_{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{i},1} & \ldots & a_{\mathbf{i},n} \end{pmatrix}$

Bezeichnungen: $\quad {}^{A}Z_i, \quad {}_{A}Z_i, \quad Z_i^A, \quad Z_i(A)$

Analog für Spalten.

Blockdarstellung

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a & b & c & d \\ \cline{1-1} e & f & g & h \\ \cline{2-4} i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \cline{1-1} & B \\ \cline{2-2} C & \\ & D \end{array}\right),$$

$$A = \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} e \\ i \\ m \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} j & j & l \\ n & o & p \end{pmatrix}.$$

Blockdarstellung

$$A = \left(\begin{array}{c} Z_1 \\ \hline Z_2 \\ \hline \vdots \\ \hline Z_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} S_1 & S_2 & \quad\ldots\quad & S_n \end{array}\right)$$

Blockdarstellung

$$A = \left(\begin{array}{c} Z_1 \\ \hline Z_2 \\ \hline \vdots \\ \hline Z_m \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} S_1 & S_2 & \quad\dots\quad & S_n \end{array} \right)$$

Erweiterung einer $(m \times n)-$Matrix A durch eine m-Spalte $\underline{b}$:

$$(A \,|\, \underline{b}) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right).$$

T r a n s p o n i e r u n g

$$A = \left(\begin{array}{c} Z_1 \\ \hline Z_2 \\ \hline \vdots \\ \hline Z_m \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} S_1 & S_2 & \cdots & S_n \end{array} \right)$$

Transponierung

$$A^T = \begin{pmatrix} S_1 \\ \hline S_2 \\ \hline \vdots \\ \hline S_m \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} Z_1 & \cdots & Z_n \end{array}\right)$$

Transponierung

$$A^T = \left(\begin{array}{c} S_1 \\ \hline S_2 \\ \hline \vdots \\ \hline S_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} Z_1 & \cdots & Z_n \end{array}\right)$$

$(m \times n)$–Matrix $A = (a_{ij}) \quad \rightsquigarrow \quad (n \times m)$–Matrix $A^T := (a_{ji})$.

Transponierung

$$A^T = \left(\begin{array}{c} S_1 \\ \hline S_2 \\ \hline \vdots \\ \hline S_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} Z_1 & \cdots & Z_n \end{array}\right)$$

$(m \times n)$–Matrix $A = (a_{ij}) \quad \rightsquigarrow \quad (n \times m)$–Matrix $A^T := (a_{ji})$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Matrixaddition

$$+ \ : \ \mathsf{Mat}_{m \times n}(R) \times \mathsf{Mat}_{m \times n}(R) \longrightarrow \mathsf{Mat}_{m \times n}(R)$$

M a t r i x a d d i t i o n

$$+ \ : \ \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

M a t r i x a d d i t i o n

$$+ \ : \ \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrixaddition

$$+ \ : \ \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Satz

$(\mathrm{Mat}_{m\times n}(R), +)$ *ist eine abelsche Gruppe.*

Matrixaddition

$$+ \ : \ \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Satz

$(\mathrm{Mat}_{m\times n}(R), +)$ *ist eine abelsche Gruppe.*

- Assoziativität und Kommutativität geerbt von $(R, +)$.

Matrixaddition

$$+ \ : \ \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Satz

$(\mathrm{Mat}_{m\times n}(R), +)$ *ist eine abelsche Gruppe.*

- Assoziativität und Kommutativität geerbt von $(R, +)$.
- Neutrales Element: die Nullmatrix $0 = 0_{m\times n}$ - alle Einträge sind 0.

Matrixaddition

$$+ \; : \; \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Satz

$(\mathrm{Mat}_{m\times n}(R), +)$ *ist eine abelsche Gruppe.*

- Assoziativität und Kommutativität geerbt von $(R, +)$.
- Neutrales Element: die Nullmatrix $0 = 0_{m\times n}$ - alle Einträge sind 0.
- $A = (a_{ij})$ hat ein inverses Element: $-A = (-a_{ij})$.

Skalarmultiplikation

$$\cdot : R \times \mathrm{Mat}_{m \times n}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m \times n}(R)$$

Skalarmultiplikation

$$\cdot : R \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \dots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \dots & \lambda\cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \dots & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$\cdot : \mathbf{R} \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$\cdot : R \times \mathsf{Mat}_{m\times n}(R) \longrightarrow \mathsf{Mat}_{m\times n}(R)$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Matrixmultiplikation

$A \cdot B$ **ist definiert nur wenn** $\#\{\text{Spalten von } A\} = \#\{\text{Zeilen von } B\}$.

Matrixmultiplikation

$A \cdot B$ **ist definiert nur wenn** $\#\{\text{Spalten von } A\} = \#\{\text{Zeilen von } B\}$.

$$\cdot \; : \; \mathrm{Mat}_{m\times \mathbf{n}}(R) \times \mathrm{Mat}_{\mathbf{n}\times p}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times p}(R) \qquad m, n, p \in \mathbb{N}_{>0}$$

M a t r i x m u l t i p l i k a t i o n

$A \cdot B$ **ist definiert nur wenn** $\#\{\text{Spalten von } A\} = \#\{\text{Zeilen von } B\}$.

$$\cdot \;:\; \mathrm{Mat}_{m \times \mathbf{n}}(R) \times \mathrm{Mat}_{\mathbf{n} \times p}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m \times p}(R) \qquad m, n, p \in \mathbb{N}_{>0}$$

Matrixmultiplikation

$A \cdot B$ **ist definiert nur wenn** $\#\{\text{Spalten von } A\} = \#\{\text{Zeilen von } B\}$.

$$\cdot \; : \; \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \times \mathrm{Mat}_{n\times p}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times p}(R) \qquad m, n, p \in \mathbb{N}_{>0}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kp} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k} b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{kp} \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

$A \cdot B$ **ist definiert nur wenn** $\#\{\text{Spalten von } A\} = \#\{\text{Zeilen von } B\}$.

$$\cdot \ : \ \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \times \mathrm{Mat}_{n\times p}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times p}(R) \qquad m, n, p \in \mathbb{N}_{>0}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kp} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k} b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{k1} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{kp} \end{pmatrix}$$

$$Z \cdot S = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 s_1 + \dots + z_n s_n \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

$A \cdot B$ **ist definiert nur wenn** $\#\{\text{Spalten von } A\} = \#\{\text{Zeilen von } B\}$.

$$\cdot\ :\ \mathrm{Mat}_{m\times n}(R) \times \mathrm{Mat}_{n\times p}(R) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times p}(R) \qquad m, n, p \in \mathbb{N}_{>0}$$

$$\left(\begin{array}{c} Z_1 \\ \hline Z_2 \\ \hline \vdots \\ \hline Z_m \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c|c|c} S_1 & S_2 & \quad\dots\quad & S_p \end{array}\right) = \begin{pmatrix} Z_1S_1 & Z_1S_2 & \dots & Z_1S_p \\ Z_2S_1 & Z_2S_2 & \dots & Z_2S_p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_mS_1 & Z_mS_2 & \dots & Z_mS_p \end{pmatrix}$$

$$Z \cdot S = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1s_1 + \dots + z_ns_n \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

Assoziativität
Wenn $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$, $B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(R)$, $C \in \mathrm{Mat}_{p\times q}(R)$, dann

$$A(BC) = (AB)C = \left(\sum_{\substack{k=1\dots n\\ \ell=1\dots p}} a_{\mathbf{i}k} b_{k\ell} c_{\ell\mathbf{j}} \right)_{\substack{\mathbf{i}=1\dots m\\ \mathbf{j}=1\dots q}} .$$

Matrixmultiplikation

Assoziativität

Wenn $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(R)$, $B \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(R)$, $C \in \mathrm{Mat}_{p\times q}(R)$, dann

$$A(BC) = (AB)C = \left(\sum_{\substack{k=1\dots n\\ \ell=1\dots p}} a_{ik} b_{k\ell} c_{\ell j}\right)_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots q}} .$$

Kommutativität

Allgemein ($m \neq p$) kann man über Kommutativität nicht sprechen, weil AB definiert ist, aber BA nicht.

Quadratische Matrizen

$\mathrm{Mat}_n(R) := \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$.

Quadratische Matrizen

$\mathrm{Mat}_n(R) := \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$.

Matrixmultiplikation = **assoziative** innere Verknüpfung auf $\mathrm{Mat}_n(R)$

Quadratische Matrizen

$\mathrm{Mat}_n(R) := \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$.

Matrixmultiplikation = **assoziative** innere Verknüpfung auf $\mathrm{Mat}_n(R)$

Neutrales Element: die $(n \times n)$-**Einheitsmatrix** (oder Identitätsmatrix)

Quadratische Matrizen

$\mathrm{Mat}_n(R) := \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$.

Matrixmultiplikation = **assoziative** innere Verknüpfung auf $\mathrm{Mat}_n(R)$

Neutrales Element: die $(n \times n)$-**Einheitsmatrix** (oder Identitätsmatrix)

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Quadratische Matrizen

$\mathrm{Mat}_n(R) := \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$.

Matrixmultiplikation = **assoziative** innere Verknüpfung auf $\mathrm{Mat}_n(R)$

Neutrales Element: die $(n \times n)$-Einheitsmatrix (oder Identitätsmatrix)

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Kommutativität:

Quadratische Matrizen

$\mathrm{Mat}_n(R) := \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$.

Matrixmultiplikation = **assoziative** innere Verknüpfung auf $\mathrm{Mat}_n(R)$

Neutrales Element: die $(n \times n)$-Einheitsmatrix (oder Identitätsmatrix)

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Kommutativität: Wenn $1 \neq 0$ in R und $n > 1$, dann **nicht kommutativ**.

Quadratische Matrizen

Satz

$(\mathrm{Mat}_n(R), +, \cdot)$ *ist ein nicht-kommutativer Ring.*

Quadratische Matrizen

Satz
$(\mathrm{Mat}_n(R), +, \cdot)$ *ist ein nicht-kommutativer Ring.*

- Wir müssen nur noch die Distributivität zeigen:

Quadratische Matrizen

Satz

$(\mathrm{Mat}_n(R), +, \cdot)$ *ist ein nicht-kommutativer Ring.*

- Wir müssen nur noch die Distributivität zeigen:

$$[(a_{ij}) + (b_{ij})]\,(c_{ij}) \quad = \quad \left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik})c_{kj}\right)$$

Quadratische Matrizen

Satz

$(\mathrm{Mat}_n(R), +, \cdot)$ *ist ein nicht-kommutativer Ring.*

- Wir müssen nur noch die Distributivität zeigen:

$$\begin{aligned}
[(a_{ij}) + (b_{ij})]\,(c_{ij}) &= \left(\textstyle\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik})c_{kj}\right) \\
&= \left(\textstyle\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}c_{kj}) + \sum_{k=1}^{n}(b_{ik}c_{kj})\right)
\end{aligned}$$

Quadratische Matrizen

Satz

$(\mathrm{Mat}_n(R), +, \cdot)$ *ist ein nicht-kommutativer Ring.*

- Wir müssen nur noch die Distributivität zeigen:

$$\begin{aligned}[(a_{ij}) + (b_{ij})]\,(c_{ij}) &= \left(\textstyle\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik})c_{kj}\right) \\ &= \left(\textstyle\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}c_{kj}) + \sum_{k=1}^{n}(b_{ik}c_{kj})\right) \\ &= (a_{ij})(c_{ij}) + (b_{ij})(c_{ij}).\end{aligned}$$

Quadratische Matrizen

Satz

$(\mathrm{Mat}_n(R), +, \cdot)$ *ist ein nicht-kommutativer Ring.*

- Wir müssen nur noch die Distributivität zeigen:

$$\begin{aligned}
[(a_{ij}) + (b_{ij})]\,(c_{ij}) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + b_{ik})c_{kj}\right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}c_{kj}) + \sum_{k=1}^{n}(b_{ik}c_{kj})\right) \\
&= (a_{ij})(c_{ij}) + (b_{ij})(c_{ij}).
\end{aligned}$$

Analog $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Die allgemeine lineare Gruppe

Die **multiplikative** Gruppe der invertierbaren quadratischen Matrizen:

Die allgemeine lineare Gruppe

Die **multiplikative** Gruppe der invertierbaren quadratischen Matrizen:

$$\mathrm{GL}_n(R) := \{A \in \mathrm{Mat}_n(R) \ : \ \exists A^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(R), \text{ sodass } A^{-1}A = AA^{-1} = I_n\}.$$

Die allgemeine lineare Gruppe

Die **multiplikative** Gruppe der invertierbaren quadratischen Matrizen:

$$\mathrm{GL}_n(R) := \{A \in \mathrm{Mat}_n(R) \ : \ \exists A^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(R), \text{ sodass } A^{-1}A = AA^{-1} = I_n\}.$$

Wenn $n > 1$, dann ist diese Gruppe **nicht kommutativ**.

Die allgemeine lineare Gruppe

Die **multiplikative** Gruppe der invertierbaren quadratischen Matrizen:

$$\mathrm{GL}_n(R) := \{A \in \mathrm{Mat}_n(R) \ : \ \exists A^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(R), \text{ sodass } A^{-1}A = AA^{-1} = I_n\}.$$

Wenn $n > 1$, dann ist diese Gruppe **nicht kommutativ**.

Uns wird insbesondere der Fall, wenn $R = \mathbb{K}$ ein Körper ist, interessieren.