LINEARE ALGEBRA 1

KLAUSUR 2

MUSTERLÖSUNG

Hier finden Sie eine ausführliche Musterlösung der Klausur. Für manche Aufgaben habe ich auch auf alternative Lösungswege hingewiesen.

Die präsentierten Lösungen sind nicht die einzigen möglichen und dienen auch nicht als Korrekturschema.

8.4.2024

Aufgabe 1.

a. Eine Abbildung $f: A \to B$ ist genau dann invertierbar wenn es eine Abbildung $f^{-1}: B \to A$ gibt, sodass:

$$f \circ f^{-1} = id_B \quad \text{und} \quad f^{-1} \circ f = id_A .$$

b. $\exists n \in N$, sodass $\forall m \in M$ gilt $h(m) \neq n$.

c. Eine Abbildung ist invertierbar wenn und nur wenn sie bijektiv ist. Die Mengen $\mathbb{Z}/_{60\mathbb{Z}}$ und $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{15\mathbb{Z}}$ sind beide endlich und geichmächtig von Kardinalität 60.

Also f = invertierbar $\Longleftrightarrow$ f = injektiv.

Seien $[a]_{60}, [b]_{60} \in \mathbb{Z}/_{60\mathbb{Z}}$, sodass $f([a]_{60}) = f([b]_{60})$.

Das heißt $([a]_4, [a]_{15}) = ([b]_4, [b]_{15})$, also dass

$$[a]_4 = [b]_4 \quad \text{und} \quad [a]_{15} = [b]_{15} .$$

Per Definition also: $4 \mid a-b$ und $15 \mid a-b$.

Weil $ggT(4,15) = 1$ folgt daraus, dass $60 \mid a-b$.

also $[a]_{60} = [b]_{60}$ und somit ist f injektiv.

d. Für 2×2 Matrizen gibt es folgende möglichen RZSF:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\in M_0 \quad \in M_1 \quad \in M_{a+1} \quad \in M_2$

Die Aussage ist falsch:

M_3 enthält eine einzige Matrix in RZSF: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

e. Sei $S: \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+b+c+d$.

Es gilt für alle $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$: $A \in M_{S(A)}$.

Also $A \sim B \iff S(A) = S(B)$.

<u>Reflexivität:</u> $A \sim A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, weil $S(A) = S(A)$

<u>Symmetrie:</u> $A \sim B \Rightarrow S(A) = S(B) \Rightarrow S(B) = S(A) \Rightarrow B \sim A$.

<u>Transitivität:</u> Wenn $A \sim B$ und $B \sim A$, dann $S(A) = S(B) = S(C)$.
Also $A \sim C$.

f. Die Abbildung S aus Punkt e. ist ein Gruppenhomomorphismus zwischen $(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}), +)$ und $(\mathbb{R}, +)$, weil

$$S(A+B) = S((a_{ij}) + (b_{ij})) = S((a_{ij} + b_{ij})) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{2} (a_{ij} + b_{ij}) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} + \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} = S(A) + S(B).$$

Wir zeigen zu erst, dass $[A]_\sim + [B]_\sim := [A+B]_\sim$ wohl definiert ist: Dafür muss man zeigen, dass wenn $A \sim A'$ und $B \sim B'$, dann gilt $A+B \sim A'+B'$.

Seien $A \sim A'$ und $B \sim B'$. Also $S(A) = S(A')$ und $S(B) = S(B')$.

Also $S(A+B) = S(A) + S(B) = S(A') + S(B') = S(A'+B')$

Also $A+B \sim A'+B'$.

Wir haben dann:

(Gr1) $\left([A]_\sim + [B]_\sim\right) + [C]_\sim = \left[(A+B)+C\right] = \left[A+(B+C)\right] = [A]_\sim + \left([B]_\sim + [C]_\sim\right)$

$\forall\, [A]_\sim, [B]_\sim, [C]_\sim \in Mat_2(\mathbb{R})/_\sim$.

(Gr2) $[0]_\sim$ ist das neutrale Element weil $\forall\, [A]_\sim \in Mat_2(\mathbb{R})/_\sim$ gilt:

$[A]_\sim + [0]_\sim = [A+0]_\sim = [A]_\sim = [0+A]_\sim = [0]_\sim + [A]_\sim$.

(Gr3) Für alle $[A]_\sim \in Mat_2(\mathbb{R})/_\sim$ ist $-[A]_\sim = [-A]$ weil:

$[A]_\sim + [-A]_\sim = [A-A]_\sim = [0]_\sim = [-A]_\sim + [A]_\sim$

Also $Mat_2(\mathbb{R})/_\sim$ ist eine Gruppe.

Alternativ: $A \sim B \iff S(A) = S(B) \iff S(A-B) = 0 \iff A-B \in M_0$.
Es gilt auch $M_0 = \operatorname{Ker} S$ also M_0 ist eine Untergruppe der abelschen Gruppe $Mat_2(\mathbb{R})$. Somit ist $Mat_2(\mathbb{R})/_\sim = Mat_2(\mathbb{R})/_{\operatorname{Ker} S}$ die Faktorgruppe.

Aufgabe 2

a. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge und $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq V$ ein Erzeugenden System von V.

Es gilt: (i) $r \leq m$ und

(ii) Bis auf Permutation von $\{w_1, \dots, w_m\}$ gilt:

$$\{v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}.$$

b. $U_2 \subseteq U_3$ $\quad (U_1 + U_2) \cap U_3 = (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$

"$\subseteq$" Sei $v \in (U_1 + U_2) \cap U_3$. Also $v \in U_1 + U_2$ und $v \in U_3$.

Es existieren also $u_1 \in U_1$ und $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2 \in U_3$.

weil $u_2 \in U_2 \subseteq U_3$, folgt aus $u_1 + u_2 \in U_3$, dass $u_1 \in U_3$.

Also $u_1 \in U_1 \cap U_3$ und $u_2 \in U_2 \cap U_3$.

Somit gilt $v = u_1 + u_2 \in (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$.

"$\supseteq$" Sei $v \in (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$. Es existieren also $w_1 \in U_1 \cap U_3$ und $w_2 \in U_2 \cap U_3$ mit $v = w_1 + w_2$.

Also $v = w_1 + w_2 \in U_1 + U_2$ und, weil $w_1, w_2 \in U_3$ auch $v = w_1 + w_2 \in U_3$.

Also $v \in (U_1 + U_2) \cap U_3$.

c. Wir betrachten Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $V = \mathbb{R}^2$.

Sei $U_1 = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(1,0)$, $U_2 = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(0,1)$ und $U_3 = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(1,1)$.

Es gilt dann: $U_1 + U_2 = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{(1,0),(0,1)\} = \mathbb{R}^2$.

$$U_1 \cap U_3 = 0 = U_2 \cap U_3,$$

weil $\{(1,0),(0,1)\}$, $\{(1,0),(1,1)\}$, $\{(0,1),(1,1)\}$ l.u. sind.

Also $(U_1 + U_2) \cap U_3 = \mathbb{R}^2 \cap U_3 = U_3 \neq 0 = 0 + 0 = (U_1 \cap U_3) + (U_2 \cap U_3)$.

d. V ist die Lösungsmenge des homogenes LGS

$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$, also $\dim_{\mathbb{C}} V = 3$.

Es reicht also zu zeigen, dass $v_1, v_2, v_3 \in V$ und linear unabhängig sind.

Es gilt $1+0 = 1+0$, also $v_1 \in V$

$0+1 = 0+1$, also $v_2 \in V$

$1+0 = 0+1$, also $v_3 \in V$.

Wir bestimmen den Rang der Matrix mit Zeilen v_1, v_2, v_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

. Diese ist schon in ZSF, also der Rang ist 3.

Also v_1, v_2, v_3 sind 3 l.u. Vektoren im 3-dim VR V, und somit eine Basis davon.

e. Man merkt, dass $w_1 = i \cdot v_1 + (-i) v_2$ und, dass

$w_2 = v_1 + v_2$.

Also, die einzige Chance ist $\{v_1, v_2, w_3\}$.

Es gilt $v_3 = v_1 + i \cdot w_3$, also $v_3 \in \operatorname{Span}\{v_1, v_2, w_3\}$.

Somit gilt $V = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \operatorname{Span}\{v_1, v_2, w_3\} \subseteq V$.

Also $\{v_1, v_2, w_3\}$ ist ein Erzeugendensystem des 3-dim. VR. V, und somit eine Basis davon.

<u>Alternative:</u> Algorithmisch: Wir berechnen eine ZSF von $\left(v_1 | v_2 | w_1 | w_2 | w_3\right)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 1 & 0 & i & 1 & -i \\ 0 & 1 & -i & 1 & i \end{pmatrix} \overset{-1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -i & 1 & i \end{pmatrix} \overset{-1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{i} \end{pmatrix}$$

Die Stufen sind also 1, 2 und 5, also $\{v_1, v_2, w_3\}$ ist eine Basis.

f. Sei $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$. (Weil beide Basen von W sind, haben sie dieselbe Kardinalität).

Sei $v_i \in B_1$, beliebig. Weil jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge selber linear unabhängig ist, folgt, dass $B_1 \setminus v_i$ linear unabhängig ist.

Aus dem Ergänzungssatz folgt, dass es eine Permutation von $\{w_1, \dots, w_n\}$ gibt, sodass

$\mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \{v_1, \dots, \hat{v_i}, \dots, v_n, w_m\} = W$.

D.h., $\exists\, w_j \in B_2$, sodass $\mathrm{Span}_{\mathbb{K}} (B_1 \setminus \{v_i\}) \cup \{w_j\} = W$.

Weil das E.S. $(B_1 \setminus \{v_i\}) \cup \{w_2\}$ n Elemente hat,

ist es eine Basis von W.

Aufgabe 3

a. Es seien V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume.
Eine Abbildung $f: V \longrightarrow W$ heißt Homomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen (oder: ist $\mathbb{K}$-linear) wenn

- $f(\lambda v) = \lambda \cdot f(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in V$
- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V.$

(Alternativ zu •… •… : $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$)

b. Die Dimension des Lösungsraumes ist $n - r$.

Sei $A \cdot \underline{x} = 0$ das homogene LGS, mit $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{K})$ und $\operatorname{rang} A = r$.

Begründung: Es gilt:
$\operatorname{rang} A = \text{ZS-rang } A = \#\text{ Stufen in RZSF } A.$
Dem Lösungsverfahren nach, gibt es einen $\mathbb{K}$-VR Isom. zwischen $\mathbb{K}^{n-r}$ und $\mathcal{L}(A|\underline{x})$, also $\dim \mathcal{L}(A|\underline{x}) = n-r$.

Begründung 2: Betrachte $f_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, $f_A(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$.

Es gilt $\mathcal{L}(A|\underline{x}) = \operatorname{Ker} f_A$ und $\operatorname{rang} A = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Bild} f_A$.
Nach dem Dimensionssatz gilt:
$$n = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Bild} f_A.$$

Also $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(A|\underline{x}) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f_A = n - \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Bild} f_A = n - r.$

c. Seien $n=2$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=v_1, v_2$ mit

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad v_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

B ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$, weil die zwei Vektoren linear unabhängig sind.

Es gilt also für alle $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$, dann

$$f_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\x-y\end{pmatrix}.$$

Also $f_A(v_1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 0\cdot v_1 + 1\cdot v_2$

$f_A(v_2) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2$.

Also $M^B(f_A) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

e. Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

Es gilt laut Voraussetzung: $\|f_A(v+w)\| = \|v+w\|$

Also auch $\|f_A(v+w)\|^2 = \|v+w\|^2$. ✪

Weiterhin:

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$$

$$= \|v\|^2 + 2\langle v,w\rangle + \|w\|^2.$$

Weil f_A linear ist, gilt $f_A(v+w) = f_A(v) + f_A(w)$

Also $\|f_A(v+w)\|^2 = \|f_A(v)\|^2 + 2\langle f_A(v), f_A(w)\rangle + \|f_A(w)\|^2$.

Aus $\circledast$ folgt dann:

$$\|f_A(v)\|^2 + 2\langle f_A(v), f_A(w)\rangle + \|f_A(w)\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w\rangle + \|w\|^2 .$$

Weil nach Voraussetzung $\|f_A(v)\| = \|v\|$ und $\|f_A(w)\| = \|w\|$ können wir kürzen und auch durch 2 teilen und bekommen $\langle f_A(v), f_A(w)\rangle = \langle v, w\rangle$.

f. Die Spalten von A sind $f_A(e_1), \dots, f_A(e_n)$, wobei e_i die Standardbasis ist.

Also $A = \left(f(e_1) \middle| \dots \middle| f(e_n) \right)$ und $A^T = \begin{pmatrix} f(e_1) \\ \hline \vdots \\ \hline f(e_n) \end{pmatrix}$.

Dann, wenn $A \cdot A^T = (x_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, gilt

$$x_{ij} = \langle f(e_i), f(e_j)\rangle .$$

Aus $\|f(v)\| = \|v\|$ Punkt **e.** folgt:

$$\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Also $(x_{ij}) = I_n$ und sommit $A \cdot A^T = I_n$.